Analiza w przestrzeniach L_p
Lista 2

Zad 1. Zbadać zbieżność ciągu x_n w przestrzeni Banacha X, gdy

	X	x_n		X	x_n
a)	ℓ_∞	$(\underbrace{\mathrm{tg}(1+\frac{1}{n})^n, ..., \mathrm{tg}(1+\frac{1}{n})^n}_{n}, 0, 0, ...)$	e)	$\ell_{\frac{5}{2}}$	$((\frac{n+1}{n})^n, (\frac{n+2}{n})^n, ..., (\frac{n+(n-1)}{n})^n, 0, ...)$
b)	ℓ_3	$(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 1, 0, ...)$	f)	ℓ_∞	$(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n^2}{n^2+1}, 0, 0, ...)$
c)	ℓ_2	$(\underbrace{\sin\frac{1}{n}, \sin\frac{1}{n}, ..., \sin\frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, ...)$	g)	ℓ_1	$\left(\underbrace{\frac{\sin 3^n}{n^2}, \frac{\sin 3^n}{n^2}, ..., \frac{\sin 3^n}{n^2}}_{n}, 0, 0, ...\right)$
d)	ℓ_2	$(\underbrace{\cos\frac{1}{n^2}, \sin\frac{1}{n^2}, ..., \sin\frac{1}{n^2}}_{n}, 0, 0, ...)$	h)	ℓ_p	$(1, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}..., \sqrt[n]{n}, 0, 0, ...)$

Zad 2. Sprawdzić, czy podzbiór M przestrzeni Banacha X jest otwarty, domknięty lub ograniczony:

	X	M		X	M
a)	ℓ_3	$\{x : x(1) = x(2)\}$	h)	ℓ_2	$\{x : \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x(k)\rvert \leq 1\}$
b)	ℓ_5	$\{x : \forall_{k\in\mathbb{N}}\, x(2k) = 0\}$	i)	ℓ_2	$\{x : \exists_n\ \forall_{k>n} x(k) = 0\}$
c)	ℓ_∞	$\{x : \sup_{k\in\mathbb{N}} \lvert x(k)\rvert < 1\}$	j)	ℓ_∞	$\{x : \exists_n\ \forall_{k>n} x(k) = 0\}$
d)	ℓ_∞	$\{x : \forall_{k\in\mathbb{N}} \lvert x(k)\rvert < 1\}$	k)	ℓ_∞	$\{x : \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x(k)\rvert < \infty\}$
e)	c_0	$\{x : \forall_{k\in\mathbb{N}} \lvert x(k)\rvert < 1\}$	l)	ℓ_1	$\{x : \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x(k)\rvert^2 \leq 1\}$
f)	ℓ_2	$\{x : \forall_{k\in\mathbb{N}}\, x(k) > 0\}$	m)	ℓ_e	$\{x : \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \leq 1 \land \forall_{k\in\mathbb{N}}\, x(k) \geq 0\}$
g)	ℓ_1	$\{x : \forall_{k\in\mathbb{N}} \lvert x(k)\rvert \leq \frac{1}{k}\}$	n)	ℓ_e	$\{x : \sum_{k=1}^{\infty} x(k) = 1 \land \forall_{k\in\mathbb{N}}\, x(k) \geq 0\}$

Zad 3. Udowodnić, że zbiór $A = \{x \in \ell_{666} : \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \leq 1$ oraz $x(k) \geq 0$ dla $k \in \mathbb{N}\}$ jest domknięty w rzeczywistej przestrzeni ℓ_{666}. Czy jest to zbiór ograniczony? Jak wygląda jego wnętrze?

Zad 4. Niech $A = \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} x(k) = 1$ oraz $x(k) \geq 0$ dla $k \in \mathbb{N}\}$. Obliczyć średnicę $\mathrm{diam}(A)$ zbioru A w przestrzeni ℓ_1 oraz w przestrzeni ℓ_2.

Zad 5. Udowodnić, że zbiór $A = \{x \in \ell_{666} : \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \leq 1$ oraz $x(k) \geq 0$ dla $k \in \mathbb{N}\}$ jest domknięty w rzeczywistej przestrzeni ℓ_{666}. Czy jest to zbiór ograniczony? Jak wygląda jego wnętrze?

Zad 6. Niech $1 \leq p < q < \infty$. Wykazać, że zbiór $A = \{x : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \leq 1\} \subseteq \ell_p \subsetneq \ell_q$ jest domknięty i brzegowy w przestrzeni ℓ_q. Pokazać, że przestrzeń ℓ_p jest przeliczalną sumą nigdziegęstych podzbiorów przestrzeni ℓ_q, a zatem na mocy Twierdzenia Baire'a ℓ_p jest podzbiorem brzegowym przestrzeni ℓ_q.

Zad 7. Pokazać, że jeżeli dwie normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ na przestrzeni X są równoważne, to przestrzeń $(X, \|\cdot\|_1)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń $(X, \|\cdot\|_2)$ jest zupełna. Podobnie przestrzeń $(X, \|\cdot\|_1)$ jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy $(X, \|\cdot\|_2)$ jest ośrodkowa.

Zad 8. Niech $1 \leq p < q < \infty$. Udowodnić, że na przestrzeni ℓ_p normy $\|\cdot\|_p$ i $\|\cdot\|_q$ nie są równoważne.

Zad 9. Pokazać, że wzory $\|x\|_a := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|x(k)|$, $\|x\|_b := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(2k-1)|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x(2k)|^2}$ definiują na ℓ_2 normy, które są równoważne standardowej normie przestrzeni ℓ_2.

Zad 10. Wykazać, że przestrzeń unormowana jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Zad 11. Wykazać, że jeżeli przestrzeń unormowana ma bazę Schaudera, to jest ośrodkowa.

Zad 12. Pokazać, że przestrzenie c_0, c, ℓ_p, $p \in [0, \infty)$, posiadają bazę Schaudera, a zatem są ośrodkowe.

Zad 13. Udowodnić, że przestrzeń ℓ_∞ nie jest ośrodkowa, a zatem nie posiada bazy Schaudera.